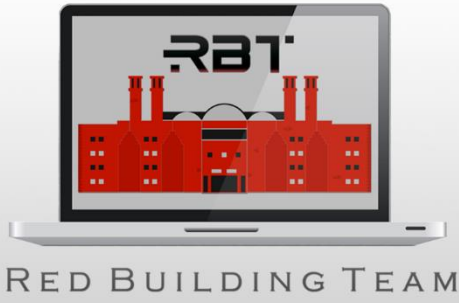


قسم هندسة الحواسيب والأتمتة

السنة الثانية / الفصل الأول

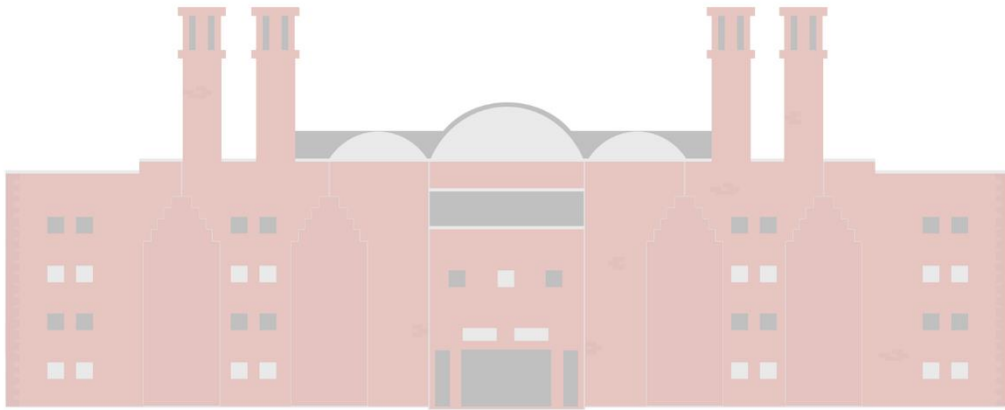


المحاضرة العاشرة

صفحات

51

التحليل
الرياضي
٣



التاريخ: 2014/10/22

الدكتور: معاذ عبد المجيد

السرعة، الدقة والتميز

rbt



/RedBuildingTeam

لا تنسونا من دعائكم فنحن نحتاجه من قلوبكم ♥

التوابع التوافقية ومعادلة لابلاس

Harmonic functions , laplaces Equation:

إذا كان $f = u + iv$ تحليلي في D ، $u, v \in C^2$ ومستمرة في D

طالما أن التابع تحليلي في D فإنه يحقق معادلتى كوشي-ريمان

$$u''_{x^2} = v''_{yx} \quad , \quad u''_{y^2} = -v''_{yx}$$

$$\nabla^2 u = u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$$

وهي تسمى معادلة لابلاس، حلها يسمى تابع توافقى في D

ملاحظة: بنفس الطريقة نوجد المعادلة بالنسبة لـ v .

عندما يكون التابع f تحليلي فإن u, v تابعان توافقيان مترافقان.

معادلة لابلاس بالإحداثيات القطبية

$$\nabla^2 u = u''_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho} u'_{\rho} + \frac{1}{\rho^2} u''_{\phi\phi} = 0$$

مبرهنة:

إذا كان u و v توافقيان ويحققان معادلتى كوشي - ريمان في D فإنهما يشكلان القسم الحقيقي والقسم التخيلي لتابع تحليلي ويسمى u و v عندئذ تابعان توافقيان مترافقان .

عندئذ كلاهما يكونان جزء حقيقي وجزء تخيلي .

مهما يكن التابع التوافقي u في D فإنه يوجد تابع توافقي مترافق معه اسمه V .

مثال :

تحقق ان التابع $u = x^2 - y^2 - y$ توافقي في D ثم أوجد التابع التحليلي V المرافق. عين D ثم عبر عن f بدلالة Z .

$$\dot{u}_{x^2} = 2, \dot{u}_{y^2} = -2$$

$$\nabla^2 u = 0 \quad \forall (x, y) \in R^2$$

لإيجاد المرافق v نعوض في معادلتى كوشي - ريمان

$$\dot{u}_x = 2x = \dot{v}_y \dots 1, \quad \dot{u}_y = -2y - 1 = -\dot{v}_x \dots 2$$

$$\Rightarrow v(x, y) = \int 2x dy + h(x) = 2xy + h(x)$$

نعوض في ... 2

$$-2y - 1 = -(2xy + h(x))' \Rightarrow -2y - 1 = -2y - h'(x)$$

$$-\dot{h}(x) = -1 \Rightarrow h(x) = x + c$$

$$v = 2xy + x + c$$

وهو المرافق التوافقي .

$$f(z) = u + iv = (x^2 - y^2 - y) + i(2xy + x + c)$$

$$= (x^2 - y^2 + i2xy) + i(x + iy) + ic$$

$$f(z) = z^2 + iz + ic$$

طريقة (٢):

$$f(z) = u(z, 0) + iv(z, 0) = z^2 + iz + ic$$

النقاط الشاذة :

نقول عن نقطة z_0 أنها نقطة شاذة للتابع وحيد الفرع $f(z)$ إذا كان غير معرف عندها أو غير تحليلي عندها ، وعدا ذلك تسمى النقطة عادية

مثال:

$$f = \frac{2z - 4}{z^2 + 1}$$

النقاط الشاذة هي $z = \pm i$

نقول عن النقطة الشاذة أنها معزولة إذا أمكن إيجاد جوار يحويها محتوى في مجموعة تعريف f ولا يحوي نقاط شاذة

للتابع f غير z_0

$$f(z) = \frac{z^2}{\sin z}$$

مثال:

النقاط الشاذة هي $z = \pi k$ وهي مجموعة نقاط غير منتهية وكلها معزولة

النقاط الشاذة القابلة للحذف (أو للإزالة):

تكون النقطة الشاذة z_0 للتابع f قابلة للإزالة إذا كانت النهاية $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ موجودة ومحددة، وغير ذلك تسمى غير قابلة للإزالة .

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

مثال:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \Rightarrow z = 0 \text{ شاذة وقابلة للحذف لأن: النهاية موجودة}$$

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

مثال:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} \Rightarrow z = 0 \text{ شاذة لأن: النهاية غير موجودة}$$

إذا $z = 0$ ليست قابلة للإزالة .

$$f(z) = \cos \frac{1}{z}$$

مثال:

$z = 0$ شاذة ولكن لا يوجد نهاية عندما $z \rightarrow 0$ فبالتالي $z = 0$ ليست قابلة للإزالة.

تصنيف النقاط الشاذة والغير قابلة للإزالة للتابع f :

إذا وجد العدد الطبيعي n بحيث يكون :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)^n f(z)] \neq 0$$

فإننا نسمي z_0 قطب من المرتبة n لـ f وإذا تعذر ذلك فإننا نسمي z_0 نقطة شاذة أساسية أو جوهريّة لـ f

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

مثال:

$z = 0$ نقطة شاذة وهي غير قابلة للإزالة

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z - 0)^1 f(z) = 1$$

$z = 0$ قطب بسيط (من المرتبة الاولى) لـ $\frac{1}{z}$

مثال: عين وصنف النقاط الشاذة لكل من التوابع التالية:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^2} \bullet$$

$Z=0$ نقطة شاذة غير قابلة للإزالة

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^n \frac{\sin z}{z^2} \Rightarrow n = 1 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 0} z^1 \frac{\sin z}{z^2} = 1 \neq 0$$

$Z = 0$ قطب من المرتبة (١)

$$f(Z) = e^{\frac{1}{Z}-1} \bullet$$

$Z_0 = 1$ نقطة شاذة

$$\lim_{z \rightarrow 1} e^{\frac{1}{z}-1} = \text{النهاية غير موجودة}$$

$Z = 1$ غير قابلة للإزالة

$$\lim_{z \rightarrow 1} (z-1)^n e^{\frac{1}{z}-1} = \text{غير موجودة}$$

$Z_0 = 1$ أساسية

$$f(z) = \frac{z+2i}{(z^2+4)(z+5)^2} \bullet$$

$Z = -5$, $Z = \pm 2i$ نقاط شاذة .

$$z = -2i \Rightarrow f(z) = \frac{z+2i}{(z-2i)(z+2i)(z+5)^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow -2i} f(z) = \frac{z+2i}{(z-2i)(z+2i)(z+5)^2}$$

$$\lim_{z \rightarrow -2i} f(z) = -\frac{1}{80 + 84i} = -2$$

$Z = -2i$ قابلة للإزالة

$$z = 2i \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 2i} \frac{z+2i}{(z-2i)(z+2i)(z+5)^2} \text{ غير موجودة}$$

$z = 2i$ غير قابلة للإزالة.

$$\lim_{z \rightarrow 2i} (z - 2i) \frac{z + 2i}{(z - 2i)(z + 2i)(z + 5)^2} = \frac{1}{(2i + 5)^2} \neq 0$$

$Z_2 = 2i$ قطب بسيط.

$$Z = -5 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow -5} \frac{z + 2i}{(z - 2i)(z + 2i)(z + 5)^2}$$

هذه النهاية غير موجودة

$Z = -5$ غير قابلة للإزالة.

$$\lim_{z \rightarrow -5} (z + 5)^2 \frac{z + 2i}{(z - 2i)(z + 2i)(z + 5)^2} = \frac{1}{-5 - 2i} \neq 0$$

$Z_3 = -5$ قطب من المرتبة الثانية

للمساعدة في حل أي تمرين أخطاء على الشكل التالي:

١. ماهي النقطة الشاذة؟
٢. هل هي قابلة للإزالة؟
٣. هل هذه النهاية موجودة؟
٤. إذا كانت غير قابلة للإزالة فهي بحاجة لتصنيف

تصويبات المحاضرة التاسعة:

الصفحة (٧): معادلة اللزوم _ معادلتى كوشي-ريمان

$$u'_y = v'_x \text{ الخطأ:}$$

$$u'_y = -v'_x \text{ الصواب:}$$